

# Název: Matematické kyvadlo

**Téma: Harmonické kmitání a vlnění**

**Úroveň: střední škola**

**Tematický celek: Obecné zákonitosti přírodovědných disciplin a principy poznání ve vědě**

**Předmět (obor): fyzika**

**Doporučený věk žáků: třídy čtyřletého gymnázia nebo vyšší stupeň víceletého gymnázia**

**Doba trvání: 2 vyučovací hodiny**

**Specifický cíl: naučit žáky naplánovat a provést badatelskou činnost a vyhodnotit její výsledky**

## Seznam potřebného materiálu:

Pomůcky a materiál pro každou skupinu:

Laboratorní stojan, rezná nit, sada závaží s háčky, svinovací metr, stopky, počítač s tabulkovým procesorem pro zpracování výsledků, digitální váhy

Pomůcky a materiál pro lektora:

PET láhev s vodou, prádelní šňůra, závěs ve výšce několik metrů (např. u stropu nebo v rámu dveří)

## Seznam praktických (badatelských) aktivit:

Sestavení matematického kyvadla

Měření periody kmitů kyvadla při různé délce a hmotnosti kyvadla

Stanovení („objevení“) typu závislosti periody kmitů kyvadla na jeho parametrech

## Anotace:

Cílem aktivity je „objevit“ základní zákonitosti spojené s matematickým kyvadlem a obecně s harmonickým kmitáním. Po úvodním motivačním experimentu žáci samostatně experimentálně zjišťují, na čem závisí doba kmitu matematického kyvadla.

## Harmonogram výuky:

	náplň práce	čas	potřebné vybavení a pomůcky	činnost učitele	činnosti žáků
Úvod do tématu – motivace	Motivační pokus „Zkouška odvahy“	10 min.	PET láhev s vodou, pevný tenký provaz, závěs ve výšce několika metrů (např. u stropu)	Učitel předvede žákům motivační pokus a dohlíží na žáky při jeho opětovném provedení.	Žáci se aktivně účastní motivačního pokusu.
Předlaboratorní příprava	Vymezení hlavních pojmů formou řízené diskuse, čtení motivačního textu v pracovních listech	10 min.	Úvodní text v pracovních listech	Na základě poznatků z motivačního pokusu formou řízené diskuse s žáky definuje učitel základní pojmy týkající se laboratorní úlohy (kyvadlo, matematické kyvadlo, doba kyvu, doba kmitu (perioda), délka závěsu). Rozdá PL s úvodním textem.	Čtení úvodního textu v pracovních listech. Žáci se účastní diskuse s učitelem, odpovídají na jeho otázky a společně vymezují základní pojmy.
Praktická (badatelská) činnost	Sestavení matematického kyvadla, naměření potřebných hodnot	40 min.	Laboratorní stojany, rezná nit, sady závaží s háčky, svinovací metr, stopky, digitální váhy, pracovní listy	Učitel dohlíží na žáky, odpovídá na jejich dotazy, je nápomocný při badatelské činnosti žáků a usměrňuje jejich myšlenky správným směrem.	Sestrojují matematické kyvadlo a měří veličiny potřebné k zjištění závislosti periody matematického kyvadla na jeho parametrech.
Vyhodnocení výsledků	Zpracování výsledků v tabulkovém procesoru	20 min.	Počítač, tabulkový procesor, naměřené hodnoty	Pomáhá žákům při zpracování hodnot v tabulkovém procesoru a pomocí lineární regrese.	Vyhodnocují graficky závislosti periody na hmotnosti a délce kyvadla a stanovují vztah pro periodu kmitů kyvadla.
Prezentace výsledků	Porovnání objevených vztahů	10 min.	Pracovní listy, počítač, případně projektor	Dozor při prezentování výsledků žáků. Z časových důvodů možno zařadit do běžné hodiny.	Žáci vzájemně prezentují výsledky a závislosti, které objevili, a formulují vztahy mezi veličinami.

Domácí úkol pro žáky: Neení.

# Přípravy pro učitele

---

## **Motivace a předlaboratorní příprava:**

V úvodu aktivity lektor přečte motivační text a poté spolu se žáky provede motivační pokus Zkouška odvahy, na kterém objasní některé pojmy (délka závěsu, doba kmitu – perioda, doba kyvu, výchylka – amplituda) a seznámí žáky s matematickým kyvadlem.

## **Motivační text:**

*Zákonitosti pohybu kyvadla pomohly sestrojít hodiny, které umožnily měřit čas mnohem přesněji, než tomu bylo u předchozích modelů hodin.*

*Galileo Galilei byl velice všímavý člověk. Na jedné bohoslužbě v katedrále v Pise ho zaujalo kývání velké bronzové lampy, která visela na dlouhém řetězu. Použil svůj pulz jako stopky a zjistil, že doba kyvu není závislá na jeho „velikosti“. To ho přimělo k dalším pokusům s kyvadly, při nichž zjišťoval, na čem doba kyvu závisí a na čem nikoli. Položil tak základy další vědecké práce, která vedla k vynálezu přesných kyvadlových hodin. Dokážete také objevit zákonitosti matematického kyvadla?*

## **Poznámky pro učitele:**

Na začátku se lektor zeptá celé třídy, jestli by někdo zkusil říci, co je to kyvadlo. Pomocí řízené diskuse žáci sestaví dohromady přibližně obecnou definici kyvadla, potom lektor seznámí žáky s definicí nejjednoduššího kyvadla – kyvadla matematického.

### *Kyvadlo:*

Kyvadlo je těleso, volně otočné kolem pevné vodorovné osy, neprocházející jeho těžištěm. Pokud je takové těleso vychýleno z rovnovážné polohy, koná kmitavý pohyb. Při něm se střídavě mění potenciální energie kyvadla na kinetickou energii kyvadla a obráceně.

### *Matematické kyvadlo:*

Matematické kyvadlo je hmotný bod zavěšený na tenkém vláknu zanedbatelné hmotnosti. Matematické kyvadlo je matematickým modelem reálného kyvadla. Zanedbáváme odpor vzduchu při pohybu kyvadla i tření v závěsu a gravitační pole považujeme za homogenní.

Lektor provede motivační pokus „Zkouška odvahy“, na kterém žákům vysvětlí rozdíl mezi pojmy kmit a kyv a objasní pojmy amplituda a perioda kmitavého pohybu. (Tematicky se pokus týká zákona zachování energie. Lze však na něm vysvětlit potřebné pojmy.)

### **Motivační pokus – Zkouška odvahy:**

**Pomůcky:** PET láhev s vodou, pevný tenký provaz nebo lanko, závěs ve výšce několik metrů (např. u stropu nebo zábradlí schodiště)

**Příprava:** Uprostřed víčka PET láhve vyvrtáme otvor, kterým prostrčíme shora konec pevného tenkého provazu o délce několik metrů. Provaz zespoda zajistíme uzlem. Víčko s provazem našroubujeme na PET láhev naplněnou vodou. Takto vzniklé kyvadlo zavěsíme ke stropu nebo na vhodné místo schodiště tak, aby se láhev zavěšená na provaze mohla volně kývat.

**Provedení:** Pokusná osoba vychýlí láhev z rovnovážné polohy tak, aby se láhev na napnutém provaze dotýkala jejího nosu. Láhev pustí a musí zůstat stát bez hnutí na místě (hlavně při prvním návratu láhve). Kolize s obličejem je však při správném provedení pokusu zcela vyloučena. Láhev nedostává při pohybu žádnou energii, pouze přeměňuje svojí potenciální energii v kinetickou a naopak. Během kyvu dochází k přeměně energie na teplo v důsledku odporu prostředí a tření závěsu. Výchozí polohy (nosu) láhev nedosáhne.

Lektor může samozřejmě se žáky diskutovat o přeměnách energie. V případě nedostatku času žákům objasní sám přeměny energie během kyvu a zároveň vysvětlí, co je jeden kyv a jeden kmit (resp. perioda kmitu). U našeho motivačního pokusu je perioda kmitu čas, za který se kyvadlo puštěné od nosu pokusné osoby vrátí opět k jejímu nosu. Tedy doba kmitu (perioda)  $T$  je nejkratší čas, po kterém se pohyb kyvadla opakuje.

#### *Perioda matematického kyvadla:*

Perioda matematického kyvadla je i čas, za který kyvadlo urazí dráhu z rovnovážné polohy přes obě krajní polohy zpět do rovnovážné polohy. Doba jednoho kyvu je čas, za který kyvadlo urazí dráhu z rovnovážné polohy do krajní polohy a zpět do rovnovážné polohy. Doba jednoho kyvu je rovna polovině periody kmitu matematického kyvadla.

### **Vlastní laboratorní práce:**

Lektor rozdělí žáky do dvojic či skupinek dle svého uvážení, počtu stojanů či jiných okolností. Poté lektor zadá skupinkám žáků úkol (viz níže) a rozdá pracovní listy.

**Úkol č. 1:** Pokuste se zjistit, na čem závisí a na čem nezávisí doba kmitu matematického kyvadla.

Jaké parametry můžeme u matematického kyvadla měnit?

Následuje diskuse se žáky na základě motivačního pokusu. Můžeme ovlivnit, kolik vody bude v láhvi (hmotnost), jak vysoko ji zavěsíme (délka závěsu) a „jak hodně blízko“ si ji dáme k nosu (výchylka). Měli bychom se dostat k následujícím veličinám:

- délka závěsu
- hmotnost závaží
- amplituda (maximální výchylka z rovnovážné polohy)

Žáci budou v dalším postupu na vyrobeném kyvadle měnit pouze délku závěsu a hmotnost. Slabou závislost doby kmitu na amplitudě je možné prozkoumat později jako rozšiřující aktivitu.

Vyrobte si své vlastní matematické kyvadlo. Jak a z čeho jste si ho vyrobili?

Lektor rozdá žákům všechny pomůcky – stojany, stopky, tenké vlákno (režnou nit), svinovací metr a závaží (nejvhodnější jsou školní laboratorní závaží s háčky).

Matematické kyvadlo kratší délky sestavíme z laboratorního stojanu, na který připevníme kolmo jakoukoli tyč (délky přibližně 20 cm) nebo držák chemického nádobí apod. Lanko závěsu upevníme tak, aby šla jeho délka během měření měnit, ale ne tak, aby se závěs od tyče v průběhu kmitu odmotával (a měnil tak svoji délku). Je možné pro jeho přichycení použít silný magnet, lepicí pásku apod. Kvalitnější upevnění dosáhneme také pomocí jednoduchého držáku byrety upevněného na stojan, do kterého uchytíme svísele naříznutou gumovou zátku. Do zářezu vložíme lanko (nit) závěsu. Upevnění delších kyvadel improvizujeme (laboratorní stojan na kraji stolu a kyvadlo až po zem, hřebík na zárubni dveří, schodiště, most).

Uvědomili jsme si, jaké veličiny můžeme měnit a jak můžeme zkusit ovlivnit dobu kmitu matematického kyvadla. Je ale potřeba také rozmyslet, jak je budeme měřit. Před samotným měřením si žáci rozmyslí odpovědi na následující otázky:

- Odkud kam budeme měřit délku závěsu?
- Jak určíme hmotnost závaží?
- Jak nejlépe a nejpřesněji určíme dobu jednoho jeho kmitu (periodu)?

Hmotnost závaží určíme vážením na digitálních vahách. Délku závěsu budeme měřit od závěsu lanka po těžiště závaží. Lektor žáky navede na myšlenku měřit dobu více kmitů a poté ji vydělit počtem kmitů. Žáci tak dosáhnou přesnějších výsledků.

Zkoumejte závislost periody matematického kyvadla na jeho parametrech

*Doporučený postup po žáky:*

- vyberte si libovolné závaží ze sady a určete jeho hmotnost pomocí digitálních vah
- zavěste závaží na co možná nejdelší délku závěsu (potřeba alespoň 130 cm, čím delší tím lépe) a vychylte jej o malý úhel. Změřte třikrát dobu deseti kmitů.
- zmenšujte postupně délku kyvadla (při stejné hmotnosti závaží). Délka závěsu by neměla být kratší než 30 cm. Změřte (vždy třikrát) dobu deseti kmitů alespoň pro pět různých délek.
- výsledky měření zapište do tabulky a určete průměrnou dobu kmitu kyvadla  $\bar{T}$

$m[\text{kg}]$				
Číslo měření	$l[\text{m}]$	$10 \cdot T[\text{s}]$		$\bar{T}[\text{s}]$
1				
2				
3				
4				
5				

- měření zopakujte pro druhé závaží jiné hmotnosti při podobných délkách závěsu

Z porovnání periody kmitů kyvadel o různých hmotnostech při podobných délkách závěsu žáci zjistí, že doba kmitu matematického kyvadla na hmotnosti závaží významně nezávisí.

Podobně z porovnání periody kmitů kyvadel o různých délkách závěsu a stejné hmotnosti žáci „objeví“, že doba kmitu matematického kyvadla je rostoucí funkcí délky závěsu kyvadla. V dalším úkolu budou žáci zkoumat tuto závislost. Pro úspěch tohoto zkoumání je však potřeba mít výsledky z měření při co nejrůznějších délkách závěsu kyvadla – od asi 30 cm do několika metrů (závislost není lineární).

Při experimentu nepoužíváme příliš velké úhlové výchylky kyvadla, abychom splnili předpoklady pro jednoduchý vztah popisující závislost periody kmitů kyvadla na jeho parametrech. (Při velkých amplitudách se výrazněji uplatňuje zejména odpor vzduchu –  $F_{odpor} \sim v^2$ )

*Upozornění:* Závaží o různých hmotnostech mají často i různou výšku. Při změně závaží se proto mění i délka závěsu kyvadla. Pokud se žáci rozhodnou při stejném nastavení závěsu měnit různá závaží, je potřeba je na tuto skutečnost upozornit.

**Úkol č. 2:** Pokuste se objevit, jak závisí doba kmitu matematického kyvadla na délce závěsu kyvadla.

Vyberte si jedno z kyvadel z předchozího úkolu (pracovní list Matematické kyvadlo – 1. Část). Přepište hodnoty délek kyvadla  $l$  a odpovídajících period  $T$  do tabulkového procesoru a vytvořte graf závislosti  $T$  na  $l$ . Je závislost  $T$  na  $l$  lineární?

Pokud žáci v předchozím úkolu změřili doby kmitu kyvadla při dostatečně různých délkách závěsu, z vytvořeného grafu zjistí, že body grafu neleží na přímce – závislost není lineární.

K „objevení“ vztahu pro výpočet periody matematického kyvadla potřebujete zjistit, jak závisí perioda na délce závěsu. Dopačítejte v tabulkovém procesoru hodnoty  $l^2$ ,  $\sqrt{l}$ , či  $\log l$  a vytvořte grafy závislosti  $T$  na těchto hodnotách.

Vzorec pro výpočet doby kmitu matematického kyvadla vychází z rovnice přímky vyjadřující lineární závislost. Ta má tvar  $T = k \cdot x$ , kde  $k = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$  (zde je  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , tíhové zrychlení) a  $x$  je námi hledaná závislost  $l^2$ ,  $\sqrt{l}$ , či  $\log l$ . (Pozor na jednotky.) Vyberte ten z grafů  $T(l^2)$ ,  $T(\sqrt{l})$ ,  $T(\log l)$ , ve kterém perioda  $T$  závisí na nezávislé proměnné „nejlineárněji“.

Žáci porovnají grafy  $T(l^2)$ ,  $T(\sqrt{l})$ ,  $T(\log l)$ . Podle schopností a znalostí žáků je také možno zkusit v tabulkovém procesoru proložení přímky těmito grafy (v Excelu „přidat spojnicí trendu“). Zjistí, že „nejlineárnější“ je závislost  $T(\sqrt{l})$ . (To je také důvod pro použití podstatně odlišných délek kyvadel v předchozím měření.)

Kompletní vztah pro periodu kmitů matematického kyvadla je tedy:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{l} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

V závěru úkolu žáci odpovědí na následující otázky:

Jaký vztah pro výpočet periody matematického kyvadla objevila vaše skupina?

Závisí doba kmitu matematického kyvadla na hmotnosti závaží? (Nezávisí.)

Jak by se změnila doba kmitu matematického kyvadla, kdybychom jej přemístili na Měsíc? (Perioda by se prodloužila.)

Jak by se změnila doba kmitu matematického kyvadla, kdybychom jej přemístili do padajícího výtahu? (Pokud by výtah padal se zrychlením  $g$ , kyvadlo by se vůči němu nepohybovalo, nekmitalo. Pokud by však výtah padal konstantní rychlostí – např. ve vzduchu po delší době letu, doba kmitu kyvadla by byla stejná jako v případě kyvadla na stole.)

V případě, že zbyde čas, mohou si žáci odvodit ze vzorce  $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$  vztah pro výpočet tíhového zrychlení, vypočítat ze svých naměřených hodnot tíhové zrychlení a porovnat jej s hodnotou v místě měření (Úkol pro šikovné).

Měření zakončí společnou diskusí vedenou lektorem, kde žáci zhodnotí své zážitky ze svého bádání a porovnajjí svůj vzorec pro výpočet periody matematického kyvadla s ostatními. Zhodnotí, jakých chyb se dopustili a jak by postupovali, kdyby úlohu měřili znovu.

## Závěrečné poznámky

### Jiné varianty a další možné úpravy či doporučení

Se šikovnějšími žáky je možno pomocí lineární regrese (prokládání přímky body grafu v Excelu) stanovit konstantu „ $k$ “ ve vztahu pro periodu matematického kyvadla a porovnat ji s předloženou konstantou, ve které vystupuje tíhové zrychlení v místě měření. Žáci tím vlastně experimentálně objeví kompletní vztah pro periodu matematického kyvadla.

### Reflexe po hodině

Žákům v různých skupinách se aktivita líbila. Často byli překvapeni, že doba kmitu kyvadla na jeho hmotnosti prakticky nezávisí (v hodinách fyziky téma kyvadlo zatím neměli).

Časté chyby při měření se týkaly zejména:

- správného počítání kmitů, často se stalo, že žáci ubrali nebo přidali jeden kmit navíc
- měření délky závěsu (některé skupinky měřili délku závěsu jen po háček závaží)
- požadavku na přesnou délku kyvadla – těžko se realizuje (uvázání, protažení nitě) – je třeba navázat přibližně a pak změřit (správně – až k těžišti závaží)!
- změny délky závěsu při výměně závaží - nezapomenout, že různá závaží jsou různě vysoká

Čas potřebný na měření i na následné „objevování“ pomocí počítače velmi závisí na znalostech a zkušenostech žáků. Pokud je pevně vymezen, musí lektor průběžně upravovat rozsah i náročnost zadání. Speciálně splnění úkolu č. 2 velmi závisí na úrovni znalostí práce s tabulkovým procesorem.

### Navazující a rozšiřující aktivity

Měření periody kývání těles (např. židle, prkna, pravítka) pro různé polohy osy otáčení.

Lze zjišťovat a zkoumat i závislost periody na počáteční výchylce matematického kyvadla pro malé amplitudy.

S aktivitou Matematické kyvadlo souvisí aktivita Jak přesné je „přesné“ měření. V této aktivitě žáci zkoumají, jak je možno upřesnit získaný výsledek měřením doby více kmitů či vícenásobným opakováním měření, i to, jak moc má smysl tyto počty zvětšovat.